Titolo del corso: Second Order Parabolic Equations

Docente: Simone Ciani

Membro del collegio proponente: Giovanna Citti

Ore frontali di lezione: 20

Periodo di lezione: Novembre-Dicembre 2025

Settore/i disciplinare del corso:

01/A3 - ANALISI MATEMATICA, PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA

Tipologia di corso: Base

Modalità di verifica dell'apprendimento: Seminario su tema scelto.

Abstract del corso:

Il corso verterà sulle basi della teoria di buona posizione e della regolarità per equazioni paraboliche lineari e quasilineari del secondo ordine. Anche se la teoria verrà confrontata passo dopo passo con i prototipi (come l'equazione del calore), prediligeremo un approccio non lineare sotto tutti gli aspetti.

Programma del corso:

1- Breve richiamo alla teoria nota sull'equazione del calore;

2- Esistenza ed unicità:
   - Metodo di Galerkin;
   - Flussi Gradiente; (semigruppi non lineari)

3- Regolarità: studieremo la relazione tra la regolarità dei coefficienti (dati) del problema e la regolarità delle soluzioni;

4- Principi di Massimo, disuguaglianza di Harnack, proprietà di rigidità.

Pertanto, collegheremo questi metodi ad una più generale teoria della regolarità per classi energetiche di funzioni, chiamate *classi paraboliche di De Giorgi*, separando le proprietà di regolarità dei loro elementi da qualsiasi equazione, e con questo, da qualsiasi tipo di principio di confronto.

Infine (tempo permettendo), osserveremo i parallelismi della teoria sviluppata con quella delle soluzioni di viscosità e l'applicazione dei metodi presentati alle equazioni di Fokker-Planck, di Kolmogorov, nonché alla loro relazione con i mercati finanziari.

SECOND ORDER PARABOLIC EQUATIONS

COURSE DIRECTOR- SIMONE CIANI

1. Abstract

The course pertains the basics for the theory of well-posedness and regularity for linear and quasi-linear second-order parabolic equations. Even if the theory will be compared step by step with the prototypes (as the heat equation), we will undertake a nonlinear the approach in all respects.

Program.

(1) Brief recall of the known theory on the Heat equation;
(2) Existence and Uniqueness:
   (a) Galerkin's method;
   (b) Gradient Flows; (nonlinear semigroup theory)
(3) Regularity: we will study the trade-off between the regularity of the coefficients (data) of the problem and the regularity of the solution;
(4) Maximum Principles, Harnack's inequality, Liouville's type theorems.

Hence we will relate these methods to the regularity theory for energetic classes of functions, called *parabolic De Giorgi clasess*, detaching the regularity properties of their members from any equation, and with this, from any sort of comparison principle.

Finally (time permitting), we will comment on the parallelisms with viscosity solutions, and the application of the methods to Fokker-Planck equations, Kolmogorov equations, and their relation with finance.

2. Prerequisites

We will give for granted the foundations of Real Analysis, as Lebesgue spaces, while recalling the basics for the classic Sobolev and Bochner spaces.

References

[1] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2010.
[2] A. Friedman, *Parabolic equations of the second order*. Transactions of the American Mathematical Society, 93(3), 509-530, 1959.
[3] O.A. Ladyzhenskaia, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. American Mathematical Soc,23, 1968.

Date: November - December (2025). Credits: 3 CFU (20h). Exam: Seminar on a selected topic.